بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شاهد
معاونت پژوهش و فناوری
مرکز چاپ و انتشارات

سیستم‌های دینامیکی و نظریه آشوب

(چاپ اول)

تألیف

بهروز رئیسی

۱۳۹۲

انتشارات دانشگاه شاهد (۱۲۲)

سرشناسه	:	رئیسی، بهروز، ۱۳۵۴ -
عنوان و نام پدیدآور	:	سیستم‌های دینامیکی و نظریه آشوب/ تألیف: بهروز رئیسی.
مشخصات نشر	:	تهران: دانشگاه شاهد، مرکز چاپ و انتشارات، ۱۳۹۲.
مشخصات ظاهری	:	۳۱۶ ص، مصور، نمودار.
شابک	:	۹۸۰۰۰ ریال: ۱- ۱۶- ۶۱۲۱- ۶۰۰- ۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا.
یادداشت	:	واژه‌نامه.
یادداشت	:	کتابنامه.
یادداشت	:	نمایه.
موضوع	:	دینامیک — راهنمای آموزشی (عالی).
موضوع	:	تجزیه و تحلیل سیستم‌ها — راهنمای آموزشی (عالی).
موضوع	:	رفتار آشوبناک در سیستم‌ها — راهنمای آموزشی (عالی).
موضوع	:	دینامیک — مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی).
شناسه افزوده	:	دانشگاه شاهد، مرکز چاپ و انتشارات.
رده بندی کنگره	:	۱۳۹۲ ۹س۹ر / TA۳۵۲.
رده بندی دیویی	:	۱۰۴/۶۲۰
شماره کتابشناسی ملی	:	۳۰۸۹۳۱۱

دانشگاه شاهد
معاونت پژوهش و فناوری
مرکز چاپ و انتشارات

سیستم‌های دینامیکی و نظریه آشوب

تألیف : بهروز رئیسی

تعداد : ۱۰۰۰ نسخه

نوبت چاپ : اول ۱۳۹۲

قیمت : ۹۸۰۰۰ ریال

نشانی ناشر : تهران، ابتدای آزادراه خلیج فارس، روبروی حرم مطهر امام خمینی (ره)، معاونت پژوهش و فناوری، مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شاهد

تلفن: ۵۱۲۱۴۱۲۲ **دورنگار:** ۵۱۲۱۳۵۴۹

فهرست مطالب

مقدمه

سیستم‌های دینامیکی شاخه‌هایی گسترده از دانش ریاضی و کاربردهای آن را دربرگرفته و به‌عنوان یکی از زمینه‌های فعال و زنده آن مطرح است. بیشتر از سه قرن پیش *نیوتن* بذر این علم را کاشته‌است و این علم با تلاش دانشمندان بسیاری رشدیافت. در حدود یک قرن پیش *هنری پوانکاره*، این شاخه از علم را به درختی تناور و محکم مبدل‌کرد. ازآنجاکه جریان‌های اصلی این علم به‌واسطه تحلیل یک مدل خاص در یک مسئله طبیعی یا ریاضی به‌راه‌افتاده‌اند و در هر زمینه‌ای تعاریف و صورت‌بندی قضایا با موضوع موردبحث، متناسب است طبیعی است که اختلاف‌نظرها و اختلاف‌سلیقه‌هایی بسیار در تعاریف و اهداف موردنظر شاخه‌ها ایجادشوند به‌گونه‌ای‌که ممکن است حتی ذهن شخص ناآشنا را به تشتت دچارکنند. به‌عنوان مثال، تعاریف بسیاری برای آشوبناک‌بودن یک سیستم دینامیکی ارائه‌شده‌اند که از میان آن‌ها چهار تعریف مهم در این کتاب مطرح‌شده‌اند.

به‌دلیل یادشده، دسته‌بندی‌های مختلفی از انواع سیستم‌های دینامیکی مطرح است. به‌عنوان مثال، سیستم‌های دینامیکی گسسته و سیستم‌های دینامیکی پیوسته، سیستم‌های متناهی‌البعد در مقابل نامتناهی البعد، توپولوژیک در کنار مشتق‌پذیر، مختلط در مقابل حقیقی؛ دسته‌بندی دیگری نیز موجود است که براساس گسسته یا پیوسته‌بودن سه مفهوم فضا، زمان و حالت معین‌می‌شود؛ این دسته‌بندی در جدول زیر خلاصه‌شده‌است.

فضا	زمان	حالت	دستگاه
پیوسته	پیوسته	پیوسته	معادلات با مشتقات جزئی
پیوسته	گسسته	پیوسته	نگاشت‌های روی فضاهای تابعی
گسسته	پیوسته	پیوسته	دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی
گسسته	گسسته	پیوسته	شبکه نگاشت‌های به‌هم‌متصل
گسسته	گسسته	گسسته	اتوماتای سلولی

از هر نمونه از سیستم‌های دینامیکی در جدول بالا یکی برای نمونه در زیر مطرح‌می‌شود:

۱- معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی: $u_t(x,t) = f(u(x,t), u_x(x,t))$،

۲- نگاشت‌ها روی فضاهای تابعی: $u(x, t+۱) = f(u(x,t))$،

۳- دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(n,t) = f(u(n-۱,t), u(n,t), u(n+۱,t)),$$

۴- شبکه‌ای از نگاشت‌های به‌هم‌متصل:

$$u(n,t+۱)=f(u(n-۱,t),u(n,t),u(n+۱,t)),$$

۵- اتوماتای سلولی: $u(n,t+۱)=f(u(n-۱,t),u(n,t),u(n+۱,t))$.
تفاوت دو دسته اخیر در این است که در یک شبکه از نگاشت‌ها، برد $u(x,t)$ اعداد حقیقی و در اتوماتای سلولی مجموعه‌ای متناهی است.

این کتاب به‌عنوان یک متن خودآموز درسی برای دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد تالیف‌شده‌است و سیستم‌های دینامیکی موردبحث در آن در زمره سیستم‌های دینامیکی گسسته و مشتق‌پذیر و برخی از مباحث آن نیز در زمره دینامیک توپولوژیک به‌شمارمی‌آیند. کتاب درعین‌حال که مباحث متنوعی را در زمینه‌های یادشده عرضه‌می‌کند، بر محور آشوب می‌چرخد و این پدیده را با جزئیاتی بسیار در دستگاه‌های دینامیکی مختلف مانند نگاشت‌ها روی فضاهای انتقال، بازه‌های حقیقی، چنبره و جاذب‌های عجیب مانند جاذب نعل اسب و جاذب سیم‌پیچ و همچنین در اتوماتاهای سلولی بررسی‌می‌کند. در این کتاب چهار تعریف مختلف از آشوب ارائه‌شده‌است که به‌ترتیب عبارتنداز ۱- آشوب به معنای دوانی ۲- مثبت‌بودن نمای لیاپانوف ۳- مثبت‌بودن آنتروپی توپولوژیکی ۴- مثبت‌بودن نرخ رشد نمایی مدارهای تناوبی.

چنان‌که پیش‌تر بیان‌شد یکی از موارد اهمیت سیستم‌های دینامیکی توانمندبودن این رشته برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی است. امروزه ریاضی‌دان‌های بسیاری از این رشته برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی در شاخه‌هایی از دانش مانند هواشناسی، زمین‌شناسی، انتقال جرم و حرارت، مدارهای ماهواره‌ای، مکانیک سماوی و نجوم، دریاشناسی و مکانیک سیالات، گرانش و کیهان‌شناسی استفاده‌می‌کنند.

این مدل‌سازی فقط به علوم طبیعی محدود نبوده، در ریاضیات نیز صورت‌می‌پذیرد که در اینجا به چند نمونه از آن پرداخته‌می‌شود. نگاشت پوانکاره که در هسته مرکزی اکتشاف‌های او قراردارد، نوعی مدل برای دسته‌بندی جواب‌های معادلات دیفرانسیل است. دینامیک نمادین و زنجیر مارکف توپولوژیکی نیز که به یک شارژ ژئودزیک و یا دستگاه معادلات دیفرانسیل عمومی نسبت‌داده‌می‌شود، مدلی برای ساختار خم‌ها در فضای فاز است.

فصل اول کتاب به ارائه مقدمات توپولوژیکی و تعاریف کلی و مثال‌های متنوع می‌پردازد. در فصل دوم دینامیک نگاشت‌ها روی خط حقیقی و دایره طرح و بررسی‌می‌شود. در این فصل، قضیه سارکفسکی اثبات‌می‌شود.

در فصل سوم دینامیک نمادین و سیستم‌های دینامیکی صفربعدی مطرح‌شده، نخستین تعریف از آشوب بیان‌می‌شود. فصل چهارم به تحقیق درباره پدیده‌های دینامیکی موجود در

خانواده نگاشت‌های مربعی ازجمله انشعاب و آشوب اختصاص‌دارد.

در فصل پنجم دینامیک نگاشت‌ها در ابعاد بیشتر از یک بررسی‌می‌شوند؛ همچنین در این فصل، دستگاه‌های دینامیکی خاص مانند نگاشت نعل اسب، اتومورفیسم‌های هذلولی چنبره، نگاشت هنون و جاذب سیم‌پیچ به‌تفصیل بررسی‌می‌شوند. اهمیت سیستم‌های دینامیکی یادشده در این است که پدیده‌های دینامیکی بسیاری را به‌تصویرمی‌کشند و کشف نمونه‌ای از آن‌ها در یک دستگاه دینامیکی از آشوبناک‌بودن دستگاه نشان‌دارد.

در فصل ششم، تعدادی از ناورداهای دینامیکی بسیار مهم، مانند نمای لیاپانوف، آنتروپی و نرخ رشد نقاط تناوبی یک سیستم دینامیکی بیان‌شده، با استفاده از آن‌ها چند تعریف جدید از آشوب مطرح‌می‌شود. پنج تعریف مختلف از آنتروپی توپولوژیکی در این فصل ارائه‌شده‌است.

در فصل هفتم زنجیرهای مارکف توپولوژیکی با تفصیل بیشتر بررسی‌می‌شوند. در فصل هشتم اتوماتای سلولی مطرح‌شده، برخی جنبه‌های مهم و تعمیم‌های آن‌ها به‌همراه کاربردها مطرح‌می‌شوند.

برای یک درس در دوره کارشناسی قسمت‌های ذیل از کتاب پیشنهادمی‌شوند: فصل اول و دوم، بخش یک و دو از فصل سوم، بخش یک و دو از فصل چهارم و بخش‌های یک، دو، سه و شش از فصل پنجم.

برای یک درس در دوره کارشناسی ارشد می‌توان پس از یک مرور سریع سه فصل اول، از فصل چهارم تا انتهای فصل هفتم را تدریس کرد. درصورت داشتن زمان بیشتر برای تدریس، می‌توان فصل هشتم را به‌منظور آموزش کاربردهای سیستم‌های دینامیکی تدریس‌کرد.

این کتاب، مشتمل بر بیش از ۴۸۰ تمرین است که طیف آن‌ها از آسان به سخت گسترده‌اند؛ این تمرین‌ها در متن کتاب و در آخر هر بخش قراردارند و گاهی به اثبات قضایا کمک‌می‌کنند، گاهی نیز، چند تمرین پیاپی به یک مطلب مستقل می‌پردازند. برای راهیابی خواننده به یک شهود منسجم از مفاهیم و قضایا مثال‌های بسیاری در این کتاب تعبیه‌شده‌است. برخی از خانواده‌های دینامیکی نیز مانند نگاشت‌های مربعی و نگاشت هنون به‌تفصیل بررسی‌شده‌اند. در تنظیم مطالب این کتاب و تهیه تمرین‌های آن از مراجع [۶]، [۲۹]، [۴۰] و [۴۱] استفاده بسیار شده‌است. کتاب [۹] نیز یکی از منابع اصلی مطالب تاریخی کتاب حاضر است و برای دریافت اطلاعات تاریخی مبسوط در زمینه آشوب می‌توانید به این کتاب مراجعه کنید. کتاب با نرم‌افزار زیپرشین نوشته‌شده‌است و نحوه ارجاع‌دادن به یک متن؛ درست مانند آنچه در سه سطر قبل انجام شد؛ به‌صورت آوردن شماره آن متن در وسط یک کروشه است.

فصل ۱

سیستم‌های دینامیکی

در این فصل، ساختار سیستم‌های دینامیکی در حالت کلی و مسائل مهم آن‌ها بررسی‌می‌شود. اگرچه موضوع این کتاب، سیستم‌های دینامیکی گسسته و متناهی‌البعد است، برای آشنایی خوانندگان، مثال‌هایی متنوع از سیستم‌های دینامیکی پیوسته یا نامتناهی‌البعد نیز ارائه‌شده‌است.

۱.۱ مقدمات توپولوژیک و تعاریف کلی

ساختار به مجموعه‌ای از اصول مستقل که دارای یک مدل باشند اطلاق‌می‌شود. بررسی ساختارها در ریاضیات، بیشتر از کارهای *دیوید هیلبرت*[۱] (۱۸۶۲-۱۹۴۳)، در تنظیم اصول شانزده‌گانه هندسه اقلیدسی و دیدگاه صورت‌گرایانه وی، در تنظیم و یکپارچه‌سازی ریاضیات متأثر است. *فیلیکس کلاین*[۲] (۱۸۴۹-۱۹۲۵) هندسه‌دان آلمانی، در برنامه ارلانگن[۳] طرحی ارائه‌داد تا هندسه را به‌صورت واحد قالب‌ریزی‌کند. از نگاه او، هندسه عبارت‌است از: یک مجموعه و نسبت‌هایی ناوردا تحت اثر زیرگروهی از جایگشت‌های آن مجموعه. برخلاف هندسه‌های با انحنای ثابت، مانند هندسه اقلیدسی، هذلولوی و کروی که در آن‌ها هر مفهوم هندسی قابل‌بیان به‌صورت یک مفهوم جبری در گروه ایزومتری‌های آن‌ها است، هندسه‌هایی وجوددارند که گروه ایزومتری آن‌ها فقط از تابع همانی تشکیل‌شده‌است. اگرچه دیدگاه *کلاین* با شکست مواجه‌شد، اثری عمیق در گرایش ریاضی‌دانان به نگاه ساختاری برجای‌گذاشت. جرج *کانتور*[۴] (۱۸۴۵-۱۹۱۸) نیز با تنظیم اصولی نظریه مجموعه‌ها، نقشی مهم را برعهده‌دارد، به‌گونه‌ای‌که امروزه هر ساختار

---

[۱] David Hilbert
[۲] Felix Klein
[۳] Erlangen Program
[۴] Georg Cantor

ریاضی در قالب نظریه مجموعه‌ها عرضه‌می‌شود.

ساختارها می‌توانند ساده یا مرکب باشند. ساختارهایی نظیر گروه‌ها، فضاهای توپولوژیک یا فضاهای متریک، ساده و ساختارهایی مانند سیستم‌های دینامیکی و فضاهای برداری که مشتمل بر چند مؤلفه ساختاری ساده هستند، نمونه‌هایی از ساختارهای مرکب به‌شمارمی‌آیند. آنچه در همه سیستم‌های دینامیکی مشترک است حضور سه مؤلفه فضا، زمان و قانون تحول است. حضور این سه مؤلفه در ترکیب هر سیستم دینامیکی، از ارتباط عمیق این رشته با مدل‌سازی‌های فیزیکی حکایت‌می‌کند. درحقیقت سیستم‌های دینامیکی به‌عنوان ابزاری برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی و اکولوژیکی پدیدارشدند. هریک از سه مؤلفه یادشده می‌تواند دارای ساختاری مستقل باشد. به‌عنوان مثال، طیف ساختارها برای فضا می‌تواند از مجموعه، فضای توپولوژیک، فضای متریک تا منیفلدها، گروه‌های لی، فضای اندازه و ... گسترش‌یابد؛ زمان نیز که ظرف تحول است، خود، دارای ساختاری است که می‌تواند یک گروه و یا نیم‌گروه باشد. رایج‌ترین مدل‌ها برای زمان در سیستم‌های دینامیکی گروه جمعی $\mathbb{Z}$، نیم‌گروه جمعی $\mathbb{Z}_+$، گروه جمعی $\mathbb{R}$ و نیم‌گروه جمعی $\mathbb{R}_+$ هستند که به‌ترتیب در همیومورفیسم‌ها، نگاشت‌ها، معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ظاهرمی‌شوند. برای بیان ماهیت ساختار سیستم‌های دینامیکی، ابتدا ماهیت ساختار مؤلفه‌های آن تبیین‌می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱. فرض‌کنید X یک مجموعه و $P(X)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های X، موسوم به مجموعه توانی X باشد. زیرمجموعه $\tau \subseteq P(X)$، را یک توپولوژی روی X گویند هرگاه:

۱- $\emptyset, X \in \tau$،

۲- اجتماع هر رده از زیرمجموعه‌های τ در τ باشد،

۳- اشتراک متناهی هر رده از زیرمجموعه‌های τ در τ باشد.

هر عضو τ را یک مجموعه باز و مکمل هر مجموعه باز را یک مجموعه بسته می‌گویند. اگر τ یک توپولوژی روی X باشد دراین‌صورت، زوج مرتب (X, τ) را یک فضای توپولوژیک می‌گویند و درصورتی‌که اشتباهی به‌وجودنیاید آن را با X نیز نمایش‌می‌دهند. زیرمجموعه $B \subseteq \tau$ را یک پایه برای توپولوژی گویند، هرگاه هر عضو از τ، اجتماعی از اعضای B باشد. هرگاه (X, τ_X) و (Y, τ_Y) دو فضای توپولوژیک باشند، تابع $f : X \to Y$ را پیوسته گویند اگر برای هر عضو $Y_1 \in \tau_Y$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$f^{-1}(Y_1) = \{x \in X : f(x) \in Y_1\} \in \tau_X.$$

نگاشت f را همیومورفیسم گویند هرگاه دوسویی و پیوسته بوده، وارون آن نیز پیوسته باشد. اگر

τ و τ' دو توپولوژی روی X باشند، آنگاه گویند τ' از τ ضعیف‌تر است اگر $\tau' \subset \tau$. روشن است که $\{\emptyset, X\}$ ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است.

مثال ۱.۱.۱. توپولوژی $\tau = P(X)$ را توپولوژی گسسته روی X می‌گویند. این توپولوژی ساختاری بیشتر از نظریه مجموعه‌ها را روی X فراهم‌نمی‌کند. توپولوژی گسسته قوی‌ترین توپولوژی روی X است.

یک پوشش از فضای توپولوژیک (X, τ) عبارت‌است از رده $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ از زیرمجموعه‌های X که I یک مجموعه اندیس است به‌طوری‌که $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. پوشش $\mathcal{A}$ را باز گویند اگر $\mathcal{A} \subset \tau$، آن را متناهی گویند اگر $|I| < \infty$. اگر برای هر دو اندیس متفاوت $i, j \in I$، $A_i \bigcap A_j = \emptyset$، آنگاه پوشش را مجزا می‌نامند. فضای توپولوژیک X را فشرده گویند اگر هر پوشش باز آن دارای یک زیرپوشش متناهی باشد. فضای توپولوژیک X را ناهمبند گویند اگر یک پوشش باز و مجزا با حداقل دو عضو ناتهی داشته‌باشد؛ درغیراین‌صورت، آن را همبند می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک متر روی مجموعه X می‌گویند، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$، در سه شرط زیر صدق‌کند:

۱- $d(x, y) \geq \circ$ و $d(x, y) = \circ \Leftrightarrow x = y$،

۲- $d(x, y) = d(y, x)$،

۳- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

دراین‌صورت، زوج مرتب (X, d) را یک فضای متریک می‌گویند. درصورتی‌که اشتباهی به‌وجودنیاید فضای متریک بالا را با X نیز نمایش‌می‌دهند.

مثال ۳.۱.۱. فرض‌کنید $X = \mathbb{R}^n$ و $x = (x_۱, \cdots, x_n)$ و $y = (y_۱, \cdots, y_n)$ دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشند. قراردهید $d(x, y) := (\sum_{i=۱}^{n} (x_i - y_i)^۲)^{\frac{۱}{۲}}$. دراین‌صورت d متر و $(\mathbb{R}^n, d)$، یک فضای متریک است. متر d را متر استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ می‌گویند.

فرض‌کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. تحدید تابع d به زیرمجموعه $A \times A$ که با همان d نمایش‌داده‌می‌شود، در همه خواص متر، صدق‌کرده، (A, d) نیز یک فضای متریک خواهدبود؛ آن را زیرفضای (X, d) می‌گویند. یک گوی باز به مرکز $x_\circ \in X$ و شعاع $r > \circ$، عبارت‌است از مجموعه $B(x_\circ, r) = \{x \in X : d(x, x_\circ) < r\}$. هرگاه $\mathcal{B}$ مجموعه همه گوی‌های باز در X و $\tau \subseteq P(X)$، مجموعه همه اجتماع‌های دلخواه اعضای

$\mathcal{B}$ باشد، آنگاه τ یک توپولوژی بوده که آن را توپولوژی فضای متریک (X,d)، یا توپولوژی القاشده از متر d می‌گویند.

اگر (X,d_X) و (Y,d_Y) دو فضای متریک و $f:X\to Y$، یک نگاشت و $x_\circ\in X$، آنگاه f را در $x_\circ$ پیوسته گویند هرگاه برای هر $\varepsilon>\circ$، یک $\delta>\circ$ موجود باشد که اگر $d_X(x,x_\circ)<\delta$، آنگاه $d_Y(f(x),f(x_\circ))<\varepsilon$. تابع f را پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه از دامنه آن پیوسته باشد.

تمرین ۱.۱.۱. فرض‌کنید X و Y دو فضای متریک و $f:X\to Y$ یک نگاشت باشد. نشان‌دهید f به معنای توپولوژیک پیوسته است، اگر و فقط اگر به معنای متریک پیوسته باشد.

دنباله $\{x_n\}$ را در فضای متریک (X,d) کوشی گویند، هرگاه برای هر $\varepsilon>\circ$ یک $n_\circ\in\mathbb{N}$ وجودداشته‌باشد که برای هر $m,n\geq n_\circ$، $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. دنباله را به $x_\circ$ همگرا گفته، با $\lim_{n\to\infty}x_n=x_\circ$ نمایش‌می‌دهند اگر برای هر $\varepsilon>\circ$ وجودداشته‌باشد $n_\circ\in\mathbb{N}$ که برای هر $n\geq n_\circ$، $d(x_n,x_\circ)<\varepsilon$. نقطه $x_\circ$ را یک نقطه حدی برای زیرمجموعه $A\subset X$ گویند هرگاه دنباله $\{x_n\}$ از عناصر A یافت شود که $x_n\to x_\circ$. مجموعه نقاط حدی A را با A' و بستار آن را با $\bar{A}:=A\cup A'$ نمایش‌می‌دهند. نقطه $x_\circ\in X$ را یک نقطه درونی برای A می‌گویند اگر مجموعه باز U یافت شود که $x_\circ\in U\subset A$. مجموعه نقاط درونی A را با A° نمایش‌می‌دهند. فضای متریک (X,d) را فضای متریک کامل یا به‌اختصار کامل گویند اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد. غیر از کوشی‌بودن یک دنباله، سایر تعریف‌های بالا برای هر فضای توپولوژیک (X,τ) نیز معتبرند.

مثال ۲.۱.۱. فضای $(\mathbb{R}^n,d)$ در مثال ۳.۱.۱، فضای متریک کامل است (ر.ک به [۵۱]).

تمرین ۲.۱.۱. ثابت‌کنید هر زیرمجموعه بسته از یک فضای متریک کامل، کامل است.

اگر (X,d) یک فضای متریک باشد، تابع قطر، $diam:P(X)-\{\emptyset\}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ به‌صورت زیر تعریف‌می‌شود:

$$diam(A):=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}.$$

توجه‌کنید که قطر می‌تواند نامتناهی باشد.

تمرین ۳.۱.۱. ثابت‌کنید اگر (X,d) فشرده باشد، آنگاه برای هر زیرمجموعه ناتهی A از X، $\circ\leqslant diam(A)<\infty$.

تمرین ۴.۱.۱. فرض‌کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک متریک‌پذیر باشد به‌طوری‌که برای هر متر d که توپولوژی τ را تولیدکند قطر X متناهی باشد. نشان‌دهید X فشرده است.

تمرین ۵.۱.۱. ثابت‌کنید اگر $A \subseteq B$ آنگاه $diam(A) \leq diam(B)$.

تمرین ۶.۱.۱. ثابت‌کنید هر زیرمجموعه بسته از یک فضای توپولوژیک فشرده، فشرده است.

اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از زیرمجموعه‌های ناتهی فضای توپولوژیک X باشد، آن‌ها را تودرتو گویند اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $A_{n+1} \subseteq A_n$. دراین‌صورت برای هر $j \leqslant k$، $\bigcup_{n=j}^{k} A_n = A_j$ و $\bigcap_{n=j}^{k} A_n = A_k$.

قضیه ۴.۱.۱. *فرض‌کنید (X, d) فضای متریک فشرده و $\{C_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های ناتهی، بسته و تودرتو از X باشد که $diam(C_n) \to 0$. دراین‌صورت $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ به‌طور دقیق شامل یک نقطه است.*

برهان. با توجه به تمرین ۵.۱.۱ و اینکه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $C \subset C_n$؛ نتیجه‌می‌شود که $0 \leqslant diam(C) \leqslant diam(C_n)$؛ چون $diam(C_n) \to 0$ پس $diam(C) = 0$. اینک اگر C شامل دو نقطه متمایز $x \neq y$ باشد آنگاه $diam(C) \geqslant d(x, y) > 0$ و این تناقض است. برای اثبات وجود، فرض‌کنید $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$، دراین‌صورت $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^c$ که C_n^c مکمل C_n و مجموعه‌ای باز است؛ چون X فشرده است، اعداد طبیعی $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_r$ یافت‌می‌شوند که $X = C_{n_1}^c \cup \cdots \cup C_{n_r}^c$، دراین‌صورت $C_{n_1} \cap \cdots \cap C_{n_r} = \emptyset$؛ ازسوی‌دیگر $C_{n_1} \cap \cdots \cap C_{n_r} = C_{n_r} \neq \emptyset$ و این تناقض است. $\square$

تمرین ۷.۱.۱. ثابت‌کنید $diam(A) = diam(\bar{A})$، $diam(A^\circ) \leqslant diam(A)$.

تمرین ۸.۱.۱. ثابت‌کنید برای هر زیرمجموعه A از فضای توپولوژیک X مجموعه $\bar{A}$ بسته و مجموعه A° باز بوده، $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$.

قضیه ۵.۱.۱. *در هر فضای متریک فشرده (X, d)، هر دنباله $\{x_n\}$ دارای یک زیردنباله همگراست.*

برهان. چون X فشرده است، پس می‌توان آن را با تعداد متناهی گوی باز به شعاع کمتر از ۱ پوشانید. طبق اصل لانه کبوتری، یکی از این گوی‌های باز، شامل تعدادی نامتناهی از عناصر دنباله $\{x_n\}$ است؛ این گوی را B_1، نام‌گذاری‌کنید؛ به‌همین‌ترتیب و به استقراء گوی باز B_n موجود است که قطر آن از $1/n$ کمتر بوده، شامل تعدادی نامتناهی از عناصر دنباله است. اینک

مجموعه‌های بسته و تودرتوی C_n را چنین تعریف‌کنید؛ $C_1 = \bar{B}_1$ و اگر $n > 1$، به استقراء قراردهید $C_n = \bar{B}_1 \cap \cdots \cap \bar{B}_n$. روشن است که $diam(C_n) \leq diam(\bar{B}_n) \leq 1/n$ و $C_{n+1} \subset C_n$. بنابراین بر طبق قضیه ۴.۱.۱ مجموعه $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ به‌طور دقیق، شامل یک نقطه x_0 است. اینک زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ را به‌گونه‌ای اختیارکنید که $x_{n_k} \in C_k$. چنان‌که در تمرین ۹.۱.۱ خواهیددید $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. □

تمرین ۹.۱.۱. ثابت‌کنید زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ در قضیه ۵.۱.۱ به $\{x_0\}$ همگراست.

تمرین ۱۰.۱.۱. ثابت‌کنید هر دنباله کوشی در هر فضای متریک، حداکثر یک نقطه حدی دارد؛ یعنی اگر $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی و $\{x_{n_k}\}$ و $\{x_{n_l}\}$ دو زیردنباله آن باشند که $x_{n_k} \to x_0$ و $x_{n_l} \to x_1$ آنگاه $x_1 = x_0$.

تمرین ۱۱.۱.۱. ثابت‌کنید اگر در فضای متریک فشرده (X, d)، دنباله $\{x_n\}$ به‌طور دقیق، دارای یک نقطه حدی x_0 باشد، آنگاه $x_n \to x_0$.

قضیه ۶.۱.۱. *در هر فضای متریک فشرده (X, d) هر دنباله کوشی $\{x_n\}$ همگراست.*

برهان. طبق قضیه ۵.۱.۱، $\{x_n\}$ حداقل یک زیردنباله همگرا و بنابراین، یک نقطه حدی x_0 دارد. چون دنباله کوشی است بنابر تمرین‌های ۱۰.۱.۱ و ۱۱.۱.۱، $x_n \to x_0$. □

تعریف ۷.۱.۱. فرض‌کنید A یک مجموعه ناتهی، $T = \{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in A\}$ یک رده از فضاهای توپولوژیک و $\mathcal{B} = \{B_\alpha \subseteq \tau_\alpha : \alpha \in A\}$، رده متناظر از پایه‌های توپولوژیک برای آن‌ها باشند. توپولوژی حاصل‌ضرب روی مجموعه $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ عبارت‌است از توپولوژی تولیدشده با پایه $B \subseteq P(X)$، که اعضای آن به‌صورت $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ هستند به‌طوری‌که برای تعداد متناهی از اندیس‌های α، $Y_\alpha \in B_\alpha$، زیرمجموعه‌ای دلخواه بوده، برای سایر اندیس‌ها $Y_\alpha = X_\alpha$.

تمرین ۱۲.۱.۱. اگر $\pi_\beta : X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$ نگاشت افکنش روی مؤلفه βام باشد، آنگاه ثابت‌کنید:

۱- هر نگاشت افکنش پیوسته است.

۲- برای هر فضای توپولوژیک Z و هر نگاشت $f : Z \to X$، f پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر اندیس β، $\pi_\beta \circ f : Z \to X_\beta$ پیوسته باشد.

۳- توپولوژی حاصل‌ضرب ضعیف‌ترین توپولوژی روی مجموعه حاصل‌ضرب است که همه نگاشت‌های افکنش را پیوسته‌می‌سازد.

تمرین ۱۳.۱.۱. نشان‌دهید توپولوژی حاصل از متر استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی حاصل‌ضرب روی $\mathbb{R}^n$ برابر است.

تمرین ۱۴.۱.۱. نشان‌دهید اگر X متناهی و توپولوژی آن گسسته باشد، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، X^n با توپولوژی حاصل‌ضرب نیز چنین است. نشان‌دهید $\prod_{i=1}^{\infty} X$ با توپولوژی حاصل‌ضرب گسسته نیست.

در اینجا مؤلفه دوم ساختاری سیستم‌های دینامیکی، یعنی ظرف تحول ارائه‌می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱. یک نیم‌گروه عبارت‌است از مجموعه G، عمل دوتایی $\cdot : G \times G \to G$ و عنصر $e \in G$ موسوم به عضو خنثی که در دو شرط زیر صدق‌کنند:

۱- برای هر $g \in G$، $\cdot(g, e) = \cdot(e, g) = g$.

۲- برای هر $g, h, k \in G$، $\cdot(g, \cdot(h, k)) = \cdot(\cdot(g, h), k)$.

ازاین‌به‌بعد $\cdot(g, h)$، با gh یا $g \cdot h$ نمایش‌داده‌می‌شود. هرگاه نیم‌گروه G در شرط زیر صدق‌کند، آن را یک گروه می‌نامند:

۳- برای هر $g \in G$ عنصری مانند $h \in G$ وجودداشته‌باشد که $g \cdot h = h \cdot g = e$. دراین‌صورت h منحصربه‌فرد بوده، عنصر وارون g نامیده‌شده، با g^{-1} نمایش‌داده‌می‌شود. اگر G یک گروه باشد تابع وارون $i : G \to G$ را چنین تعریف‌کنید که هر عنصر را به وارون آن می‌نگارد. فرض‌کنید G یک گروه باشد و $H \subseteq G$. زیرمجموعه ناتهی $H \subseteq G$ را زیرگروه گویند و با $H \leq G$ نمایش‌می‌دهند، اگر برای هر $g, h \in H$، $g \cdot h^{-1} \in H$.

اگر X یک مجموعه ناتهی باشد، آنگاه $A(X)$، مجموعه همه توابع دوسویی روی X به‌همراه عمل دوتایی ترکیب توابع یک گروه است. فرض‌کنید (X, τ_X) یک فضای توپولوژیک و $Home(X)$ مجموعه همه همیومورفیسم‌های روی X باشند، دراین‌صورت روشن است که $Home(X) \leq A(X)$.

فرض‌کنید (X, d_X) یک فضای متریک باشد. نگاشت دوسویی $f : X \to X$ را ایزومتری گویند هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in X$ رابطه $d_X(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ برقرار باشد. مجموعه ایزومتری‌های روی X را با $Iso(X)$ نمایش‌می‌دهند. دراین‌صورت $Iso(X) \leq Home(X)$.

تمرین ۱۵.۱.۱. نشان‌دهید برای هر فضای توپولوژیک X، $Home(X) \leq A(X)$.

تمرین ۱۶.۱.۱. نشان‌دهید برای هر فضای متریک X، $Iso(X) \leq Home(X)$.

فرض‌کنید G یک نیم‌گروه و τ_G یک توپولوژی روی آن باشد. زوج (G, τ_G) را یک نیم‌گروه توپولوژیک گویند هرگاه نگاشت $\cdot : G \times G \to G$ پیوسته باشد. زوج (G, τ_G) را گروه توپولوژیک گویند، اگر G گروه باشد و علاوه‌بر عمل دوتایی، نگاشت $i : G \to G$ نیز پیوسته باشد.

تعریف ۹.۱.۱. یک سیستم دینامیکی سه‌تایی (X, G, ϕ) است که (X, τ_X) یک فضای توپولوژیک، G یک گروه (نیم‌گروه) توپولوژیک و $\phi : G \times X \to X$ تابعی است پیوسته که در دو شرط زیر صدق‌می‌کند:

۱- برای هر $x \in X$، $\phi(e, x) = x$.

۲- برای هر $g, h \in G$ و برای هر $x \in X$، $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$.

دراین‌صورت X را فضای فاز سیستم دینامیکی، ϕ را شار یا قانون تحول و G را ظرف تحول یا زمان آن می‌گویند. درصورتی‌که اشتباهی به‌وجودنیاید $\phi(g, x)$ را با $g \cdot x$ یا gx نیز نمایش‌می‌دهند. اگر مفهوم بعد برای X دارای معنی باشد، بعد سیستم دینامیکی (X, G, ϕ) را برابر با بعد X تعریف‌می‌کنند.

تمرین ۱۷.۱.۱. فرض‌کنید G یک گروه و (X, G, ϕ) یک سیستم دینامیکی باشد. برای هر $g \in G$، نگاشت $\phi_g : X \to X$ را چنین تعریف‌کنید: $\phi_g(x) = \phi(g, x)$.

۱- نشان‌دهید $\phi_g \in Home(X)$.

۲- نشان‌دهید نگاشت $\overline{\phi} : G \to Home(X)$ که با $\overline{\phi}(g) = \phi_g$ تعریف‌می‌شود، یک هم‌ریختی گروهی است؛ یعنی برای هر $g, h \in G$، $\overline{\phi}(gh) = \overline{\phi}(g) \circ \overline{\phi}(h)$.

برای سیستم دینامیکی (X, G, ϕ)، مدار $x \in X$ تحت شار ϕ عبارت‌است از زیرمجموعه $O(x) := \{g \cdot x : g \in G\}$ از X. مدار x را گاهی با $G \cdot x$ یا Gx نیز نمایش‌می‌دهند.

تعریف ۱۰.۱.۱. نقطه $x \in X$ را یک نقطه تعادل برای سیستم‌دینامیکی (X, G, ϕ) می‌نامند، هرگاه $O(x) = \{x\}$. نقطه تعادل را گاهی نقطه ثابت یا نقطه تکین نیز می‌نامند. پایاگر x زیرمجموعه‌ای از گروه G است که x را ثابت نگه‌می‌دارد:

$$G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\},$$

و هسته شار ϕ برابر است با $ker\phi := \bigcap_{x \in G} G_x$.

تمرین ۱۸.۱.۱. نشان‌دهید برای هر $x \in X$ و هر $g \in G$، $gG_xg^{-1} = G_{gx}$.

تمرین ۱۹.۱.۱. نشان‌دهید $ker\phi \trianglelefteq G$ و برای هر $x \in X$، $G_x \leq G$.

شار ϕ را صادق گویند هرگاه $ker\phi = \{e\}$، آن را متعدی گویند هرگاه عنصر $x \in X$ یافت شود که $X = O(x)$. زیرمجموعه $Y \subseteq X$ را تحت شار پایا گویند هرگاه

$$G \cdot Y = \{g \cdot y : g \in G, y \in Y\} \subseteq Y.$$

تمرین ۲۰.۱.۱. ۱- نشان‌دهید X و $\emptyset$ تحت شار پایا هستند.

۲- نشان‌دهید هر مدار $O(x)$ تحت شار پایاست.

۳- نشان‌دهید مجموعه X به‌واسطه مدارهای شار ϕ افرازمی‌شود.

۴- نشان‌دهید $Y \subseteq X$ تحت شار پایاست اگر و فقط اگر $Y = \bigcup_{y\in Y} O(y)$.

تمرین ۲۱.۱.۱. ثابت‌کنید اجتماع و اشتراک هر رده از زیرمجموعه‌های ناوردای یک سیستم دینامیکی، ناورداست.

تعریف ۱۱.۱.۱. دو سیستم دینامیکی (X, G, ϕ) و (Y, G, ϕ) را مزدوج توپولوژیکی گویند هرگاه همیومورفیسم $h : X \to Y$ وجودداشته‌باشد که برای هر $x \in X$ و برای هر g رابطه $h(\phi(g, x)) = \psi(g, h(x))$ برقرار باشد. این رابطه را به‌طور نمادین با $h \circ \phi = \psi \circ h$ نمایش‌می‌دهند.

مجموعه توابع مزدوج توپولوژیکی از X به X را با $Aut(X, G, \phi)$ نمایش‌می‌دهند؛ درصورتی‌که اشتباهی به‌وجودنیاید، آن را با $Aut(X)$ نیز نمایش‌می‌دهند.

تمرین ۲۲.۱.۱. فرض‌کنید $h : X \to Y$ یک مزدوج توپولوژیکی بین دو سیستم دینامیکی (X, G, ϕ) و (Y, G, ψ) باشد:

۱- نشان‌دهید برای هر $x \in X$، $h(O(x)) = O(h(x))$ و $G_x = G_{h(x)}$.

۲- نشان‌دهید زیرمجموعه $X_1 \subseteq X$ تحت شار ϕ پایاست اگر و فقط اگر زیرمجموعه $h(X_1) \subseteq Y$ تحت شار ψ پایا باشد.

تمرین ۲۳.۱.۱. ۱- نشان‌دهید $Aut(X, G, \phi) \leq Home(X)$، ولی تساوی به‌طور لزوم اتفاق‌نمی‌افتد.

۲- فرض‌کنید $g \in G$، نشان‌دهید اگر $g \in Z(G)$ آنگاه $\phi_g \in Aut(X)$. در اینجا $Z(G)$ مرکز گروه است:

$$Z(G) := \{h \in G \mid \forall k \in G \quad hk = kh\}.$$

یک زیردینامیک از (X, G, ϕ)، سیستم دینامیکی (Y, G, ψ) است که $Y \subseteq X$، بسته و ناوردا بوده، $\psi : G \times Y \to Y$ تحدید شار ϕ روی $G \times Y$ باشد. فرض‌کنید (X_i, G_i, ϕ_i) برای هر $i = ۱, \cdots, n$، یک سیستم دینامیکی باشد. حاصل‌ضرب آن‌ها سیستم دینامیکی (X, G, ϕ) است که در آن $X = \prod_{i=۱}^{n} X_i$ و $G = \prod_{i=۱}^{n} G_i$ و $\phi : G \times X \to X$ چنین تعریف‌می‌شود:

$$\phi((g_۱, \cdots, g_n), (x_۱, \cdots, x_n)) = (g_۱ x_۱, \cdots, g_n x_n).$$

تمرین ۲۴.۱.۱. نشان‌دهید هر سیستم دینامیکی (X_i, G_i, ϕ_i) با یک زیردینامیک سیستم دینامیکی حاصل‌ضرب (X, G, ϕ) مزدوج توپولوژیکی است، هرگاه هریک از مؤلفه‌ها دارای نقطه ثابت باشند.

سیستم دینامیکی (X, G, ϕ) را مینیمال گویند اگر شامل هیچ زیرمجموعه سره، بسته و ناوردا نباشد؛ به‌عنوان مثال اگر عمل G روی X متعدی باشد، آنگاه سیستم مینیمال است.

در فصل‌های آینده، دو مفهوم اساسی انشعاب و انتگرال‌پذیری در سیستم‌های دینامیکی به‌تفصیل بررسی‌می‌شوند. در اینجا این دو مفهوم در کلی‌ترین حالات خود در سیستم‌های دینامیکی مطرح‌می‌شوند. مثال‌ها و مصادیق متنوع انشعاب و انتگرال‌پذیری در فصل‌های بعد خواهدآمد. فرض‌کنید (X, d_X) و (M, d_M) دو فضای متریک باشند. دراین‌صورت نگاشت پیوسته $\phi : M \times G \times X \to X$ را یک خانواده (یک یا چند) پارامتری پیوسته از سیستم‌های دینامیکی روی X گویند هرگاه برای هر $\mu \in M$ نگاشت $\phi_\mu : G \times X \to X$ که با $\phi_\mu(g, x) = \phi(\mu, g, x)$ تعریف‌می‌شود یک سیستم دینامیکی باشد. اگر یک همسایگی $B(\mu_۰, \varepsilon)$ از $\mu_۰$ وجودداشته‌باشد که برای هر $\mu_۱, \mu_۲ \in B(\mu_۰, \varepsilon)$ دو سیستم دینامیکی $\phi_{\mu_۱}$ و $\phi_{\mu_۲}$ مزدوج توپولوژیکی باشند گویند $\mu = \mu_۰$ مقدار انشعاب نیست. درغیراین‌صورت گویند سیستم در $\mu = \mu_۰$ منشعب‌می‌شود (یا دارای انشعاب است).

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض‌کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) دو فضای متریک و (X, G, ϕ) یک سیستم دینامیکی روی X باشد، دراین‌صورت، تابع $I : X \to Y$ را یک انتگرال برای سیستم دینامیکی بالا می‌گویند، اگر برای هر $x \in X$ و برای هر $g \in G$ رابطه $I(\phi_g(x)) = I(x)$ برقرار باشد.

۲.۱ سیستم‌های دینامیکی گسسته و قضایای نقطه ثابت

در این بخش به بررسی رده مهمی از سیستم‌های دینامیکی (X, G, ϕ) پرداخته‌می‌شود که در آن‌ها زمان گسسته است؛ یعنی $G = \mathbb{Z}$ یا $\mathbb{Z}_+$. گستره وسیع و کاربردهای فراوان این

سیستم‌ها موجب شده تا در دهه‌های اخیر، در برنامه پژوهشی بسیاری از دانشمندان قرارگیرند: نگاشت‌های بازه‌ای و nبعدی، دینامیک توپولوژیک، اتوماتای سلولی، دینامیک نمادین، ماشین تورینگ، دستگاه‌های تفاضلی و معادلات بازگشتی، همه از مصادیق سیستم‌های دینامیکی گسسته به‌شمارمی‌آیند؛ همچنین از کاربردهای این نوع از سیستم‌ها در سایر زمینه‌های علم می‌توان به موارد زیر اشاره‌کرد:

۱-سیستم‌های دینامیکی گسسته ابزاری برای تحلیل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل و انتگرال هستند. به‌عنوان مثال نگاشت پوانکاره اجازه‌می‌دهد تا وجود جواب‌های تناوبی و پایداری آن‌ها در دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل بررسی شوند؛ همچنین نگاشت لورنس ثابت‌می‌کند که جاذب لورنس درحقیقت، یک جاذب عجیب است، نه یک دور حدی با زمان طولانی. حل عددی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، به‌وسیله دستگاه‌های معادلات تفاضلی، نمونه‌ای دیگر از کاربرد سیستم‌های دینامیکی گسسته در سیستم‌های دینامیکی پیوسته است.

۲-سیستم‌های دینامیکی گسسته ابزاری برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی به‌شمارمی‌آیند. در برخی مدل‌ها به‌کاربردن زمان گسسته طبیعی‌تر از زمان پیوسته است. در این خصوص می‌توان از بخش‌هایی از اقتصاد، ریاضیات مالی، نوسانگرهای مکانیکی و مطالعه جمعیت‌هایی که در آن‌ها نسل‌های مختلف دارای هم‌پوشانی نیستند نام‌برد؛ همچنین از اتوماتای سلولی در بررسی پدیده‌های فیزیکی مبتنی بر انتشار، مانند حریق، جریان آب، توزیع جرم در کهکشان‌ها و ریزش بهمن استفاده شده، مدل‌های گسسته تولیدشده با آن از مدل‌های پیوسته متناظر ساده‌ترند.

۳-سیستم‌های دینامیکی گسسته، نمونه‌هایی ساده و محاسبه‌پذیر از پدیده‌های دینامیکی مانند آشوب، اقسام انشعاب، وجود مجموعه‌های حدی خاص و... را ارائه‌می‌دهند.

۴-دینامیک نمادین به‌عنوان یک رده از سیستم‌های دینامیکی گسسته ابزاری پرقدرت در رده‌بندی مدارهای انواع مختلف سیستم‌های دینامیکی به‌شمارمی‌آیند. به‌عنوان مثال به‌منظور دسته‌بندی ژئودزیک‌ها روی رویه‌ها یا دسته‌بندی مدارها در مسئله حرکت ماهواره (مسئله سه‌جسم مقید) یا بررسی مدار نقاط در نگاشت لجستیک از دینامیک نمادین استفاده‌می‌شود. از دینامیک نمادین همچنین در نظریه کد استفاده‌می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱. هرگاه (X, τ_X) یک فضای توپولوژیک یا (X, d_X) یک فضای متریک و $G = \mathbb{Z}$ یا $G = \mathbb{Z}_+$، آنگاه سیستم دینامیکی (X, G, ϕ) را یک سیستم دینامیکی گسسته یا یک نگاشت می‌گویند.

فرض‌کنید $G = \mathbb{Z}_+$ (یا $G = \mathbb{Z}$) و $f : X \to X$ را با رابطه $f(x) := \phi(۱, x)$

تعریف‌کنید. دراین‌صورت f یک نگاشت پیوسته (و وارون‌پذیر) بوده، برای هر $n \in \mathbb{Z}_+$، (یا $n \in \mathbb{Z}$)، $\phi(n,x) = f^n(x)$ و ϕ به‌طور کامل، به‌واسطه نگاشت (هميومورفيسم) f معین‌می‌شود؛ این مطلب وجه تسمیه سیستم‌های دینامیکی گسسته به نگاشت (یا همیومورفیسم) را روشن‌می‌کند. دراین‌حالت نقطه x تکین است اگر و فقط اگر $f(x) = x$. در سیستم دینامیکی $f : X \to X$، مدار پیش‌رو یک نقطه دلخواه $x \in X$، عبارت‌است از مجموعه $O^+(x) = \{f^n(x) : n \geq ۰\}$. اگر f همیومورفیسم باشد آنگاه مدار پس‌گرد نقطه $x \in X$، عبارت‌است از $O^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \geq ۰\}$.

تعریف ۲.۲.۱. نقطه x را برای نگاشت $f : X \to X$ متناوب گویند هرگاه عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ یافت شود که $f^n(x) = x$. هرگاه n کوچک‌ترین عدد با این خاصیت باشد آن را دوره تناوب اولیه x می‌گویند. نقطه x را سرانجام‌متناوب گویند هرگاه اعداد طبیعی $m > n$ یافت شوند که $f^m(x) = f^n(x)$. اگر m, n کوچک‌ترین دو عدد طبیعی با این خاصیت باشند x را نقطه‌ای از نوع (n,k) گویند که $k = m-n$. دراین‌صورت، دوره تناوب مدار سرانجام‌متناوب $O(x)$ برابر با $k = m - n$ تعریف‌می‌شود.

مثال ۱.۲.۱. نقطه $x_۰ = ۱$ برای نگاشت لجستیک $f_\mu = \mu x(۱ - x)$ مداری سرانجام‌تناوبی تولیدمی‌کند. این مدار درحقیقت، سرانجام ثابت است. زیرا $x_۰ = ۱$ و $x_۱ = x_۲ = ۰$.

مثال ۲.۲.۱. نقطه $x_۰ = ۷/۱۰$ یک مدار سرانجام‌تناوبی برای $T(x) = ۱ - |۲x - ۱|$ (نگاشت خیمه) تولیدمی‌کند.

نقاط تناوبی و سرانجام‌تناوبی نگاشت خیمه. نقطه x برای نگاشت خیمه سرانجام‌تناوبی است اگر و فقط اگر $x = p/q$ گویا باشد. زیرا با توجه به اینکه $T(x) = ۲x$ یا $T(x) = ۲ - ۲x$ دراین‌صورت:

$$T(x) = \text{عددی صحیح} \mp ۲x$$
$$T^۲(x) = \text{عددی صحیح} \mp ۲^۲x$$
$$T^n(x) = \text{عددی صحیح} \mp ۲^n x.$$

اگر $T^n(x) = T^m(x)$ آنگاه $k \mp ۲^n x = l \mp ۲^m x$؛ بنابراین $x = (k-l)/(\mp ۲^m \mp ۲^n)$، یعنی x عددی گویاست. برای دیدن سمت دیگر برهان فرض‌کنید $x = p/q$ عددی گویا باشد؛ دراین‌صورت $T(x) = ۲p/q$ یا $T(x) = ۲ - ۲p/q$. در هر دو حالت $T(x)$ به‌صورت k/q

است. با تکرار این بحث $T^n(x)$ نیز به‌صورت k/q خواهدبود؛ اما تعداد کسرها به‌صورت k/q در بازه $[0, 1]$ متناهی بوده، مدار x سرانجام‌متناوب خواهدشد؛ برای نمونه:

۱- $x = ۴/۵$ نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب ۲ است:

$$x_0 = ۴/۵, x_1 = ۲/۵, x_2 = ۴/۵.$$

۲- $x = ۵/۷$ یک مدار سرانجام‌تناوبی است:

$$x_0 = ۵/۷, x_1 = ۴/۷, x_2 = ۶/۷, x_3 = ۲/۷, x_4 = ۴/۷.$$

قضیه ۳.۲.۱. *نقطه $x = p/q$ برای نگاشت خیمه تناوبی است اگر و فقط اگر p عددی زوج و q عددی فرد باشد.*

فرض‌کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد. برای یادآوری دنباله $\{x_n\}$ از اعضای آن را به x همگرا گویند و آن را با $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ نمایش‌می‌دهند، اگر برای هر $U \in \tau$ که x را دربرداشته‌باشد، عدد $n_0 \in \mathbb{N}$ یافت شود که اگر $n \geq n_0$، آنگاه $x_n \in U$. فرض‌کنید $A \subset X$ مجموعه‌ای ناتهی باشد. $x \in X$ را یک نقطه حدی برای A گویند اگر دنباله $\{a_n\}$ از نقاط A وجودداشته‌باشد که $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. بنابر تعریف A را در X چگال گویند اگر $\bar{A} = X$. مرز مجموعه A که با ∂A نمایش‌داده‌می‌شود، عبارت‌است از $\bar{A} \bigcap \overline{X - A}$. نقطه a را یک نقطه درونی A گویند اگر مجموعه باز $U \in \tau$ یافت شود که $a \in U \subset A$. مجموعه نقاط درونی A را با A° نمایش‌می‌دهند. اگر درون بستار A تهی باشد؛ یعنی $(\bar{A})^\circ = \emptyset$، آنگاه A را هیچ‌جاچگال می‌گویند.

تمرین ۱.۲.۱. ثابت‌کنید مجموعه نقاطی به‌صورت $m/2^n$ که $m, n \in \mathbb{Z}$، در $\mathbb{R}$ چگال هستند.

تمرین ۲.۲.۱. ثابت‌کنید مرز یک مجموعه در یک فضای متریک، مجموعه‌ای بسته و مرز یک مجموعه باز، علاوه‌برآن، هیچ‌جاچگال است. نتیجه‌بگیرید که مرز مرز، هیچ‌جاچگال است.

تمرین ۳.۲.۱. یک فضای متریک و تعدادی شمارا مجموعه باز و چگال در آن مثال بزنید که اشتراک آن‌ها تهی باشد.

تمرین ۴.۲.۱. قضیه ۳.۲.۱ را ثابت‌کنید و سپس نشان‌دهید مجموعه نقاط تناوبی نگاشت خیمه در $[0, 1]$ چگال هستند.

تمرین ۱.۲.۵. فرض‌کنید $f : X \to X$ و $g : Y \to Y$ دو سیستم دینامیکی و $h : X \to Y$ یک مزدوج توپولوژیکی میان دو سیستم دینامیکی باشد:

۱- نشان‌دهید $x \in X$ نقطه‌ای متناوب با دوره تناوب اولیه n است، اگر و فقط اگر $y = h(x) \in Y$ متناوب با دوره تناوب اولیه n باشد.

۲- نشان‌دهید $x \in X$ نقطه‌ای از نوع (n, k) برای f است، اگر و فقط اگر $y = h(x)$ نقطه‌ای از نوع (n, k) برای g باشد.

لم ۱.۲.۴. *نگاشت‌های اولام*[1] $U(x) = ۴x(۱ - x)$ *و خیمه* $T(x) = ۱ - ۲|x - ۱/۲|$، *با رابطه* $S(x) = ۱/۲ - \arcsin(۱ - ۲x)/\pi$، *مزدوج یکدیگر هستند.*

برهان. ابتدا تساوی $S(U(x)) = T(S(x))$ ثابت‌می‌شود. برای حذف قدرمطلق دو حالت مختلف $x > ۱/۲$ و $x < ۱/۲$ را جداگانه درنظربگیرید؛ دراین‌صورت برای $x \in [۱/۲, ۱]$، روابط :

$$S(U(x)) = \frac{۱}{۲} - \frac{\arcsin(۱ - ۸x(۱ - x))}{\pi}, T(S(x)) = ۱ + \frac{۲\arcsin(۱ - ۲x)}{\pi},$$

برقرار است. برای چک‌کردن اتحاد توجه‌کنید که دوطرف در $x = ۱/۲$ برابرند و مشتقات دوطرف نیز برابرند:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(۱ - ۸x + ۸x^۲) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}۲\arcsin(۱ - ۲x).$$

تساوی اخیر با استفاده از رابطه $\mathrm{d}/\mathrm{d}x(\arcsin(x)) = ۱/\sqrt{۱ - x^۲}$ به‌دست‌می‌آید. اتحاد روی $[۰, ۱/۲]$ نیز به‌همین‌ترتیب کنترل‌می‌شود. $\square$

مدارهای سرانجام‌تناوبی برای نگاشت اولام. وجود رابطه تزویج میان دو نگاشت T و U، نقاط تناوبی T را با نقاط تناوبی U و نقاط سرانجام‌تناوبی T را با نقاط سرانجام‌تناوبی U هماهنگ‌کرده، در یک رابطه یک‌به‌یک قرارمی‌دهد. رابطه تزویج را $S(x) = (۱ - \cos \pi x)/۲$ درست‌می‌کند. برای نمونه چون $x_۰ = ۵/۷$ یک نقطه سرانجام‌تناوبی برای نگاشت خیمه است، نقطه $x_۰ = S^{-۱}(۵/۷) = (۱ - \cos(۵\pi/۷))/۲$ یک شرط اولیه برای یک مدار سرانجام‌تناوبی برای نگاشت اولام است:

$$\begin{array}{ccccc} x_۰ = ۵/۷ & x_۱ = ۴/۷ & x_۲ = ۶/۷ & x_۳ = ۲/۷ & x_۴ = ۴/۷ \\ \uparrow S & \uparrow S & \uparrow S & \uparrow S & \uparrow S \\ y_۰ = ۰/۸۱۱ & y_۱ = ۰/۶۱۱ & y_۲ = ۰/۹۵۰ & y_۳ = ۰/۱۸۸ & y_۴ = ۰/۶۱۱. \end{array}$$

[1] Stanislaw Ulam

مجموعه‌های پایدار و ناپایدار برای نگاشت‌ها و همیومورفیسم‌ها از مشخصه‌های اصلی دینامیک آن‌ها بوده، اهمیتی فراوان در کشف ساختار دینامیکی آن‌ها دارند. مثال‌هایی که در پی می‌آیند نشان‌می‌دهد که گاهی چهره دینامیکی یک نگاشت، در یافتن چند مجموعه پایدار یا ناپایدار آشکارمی‌شود. در برخی موارد نیز چنانکه درخصوص اتومورفیسم‌های روی چنبره خواهیددید، پیچیدگی نگاشت، به پیچیدگی این مجموعه‌ها بازمی‌گردد.

تعریف ۱.۲.۵. فرض‌کنید $x \in X$ نقطه‌ای متناوب، با دوره تناوب اولیه n برای نگاشت $f : X \to X$ باشد. مجموعه پایدار x که با $W^s(x)$ نمایش‌داده‌می‌شود، طبق تعریف عبارت‌است از همه نقاطی که به‌طور مثبت مجانب x هستند:

$$W^s(x) := \{y \in X : \lim_{k\to+\infty} f^{nk}(y) = x\}. \tag{۱.۱}$$

درحالتی‌که $f : X \to X$ یک همیومورفیسم باشد، مجموعه ناپایدار x که با $W^u(x)$ نمایش‌داده‌می‌شود عبارت‌است از مجموعه نقاطی که به‌طور منفی مجانب x هستند:

$$W^u(x) := \{y \in X : \lim_{k\to-\infty} f^{nk}(y) = x\}. \tag{۲.۱}$$

اگر $n = ۱$، آنگاه x یک نقطه تکین بوده، تعاریف بالا همچنان برقرارند. اگر $X = \mathbb{R}$ و دنباله $|x|, |f(x)|, |f^۲(x)|, \cdots$ بدون کران رشد کند، گویند x به‌طور مثبت مجانب ∞ است. مجموعه همه $x \in \mathbb{R}$ را که به‌طور مثبت مجانب ∞ هستند با $W^s(\infty)$ نمایش‌می‌دهند. درحالتی‌که $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ همیومورفیسم باشد $W^u(\infty)$ به‌طور مشابه تعریف‌می‌شود.

در اینجا چند مثال از مجموعه‌های پایدار و ناپایدار ارائه‌می‌شود.

مثال ۱.۲.۳. اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $f(x) = x^۳$، آنگاه $W^s(\infty) = (-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty)$، $W^s(۰) = (-۱, ۱)$، $W^s(۱) = \{۱\}$ و $W^s(-۱) = \{-۱\}$.

مثال ۱.۲.۴. فرض‌کنید $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با رابطه $g(x) = |x - ۱|$ تعریف شود؛ دراین‌صورت $g(۰) = ۱$، $g(۱) = ۰$ و $\{۰, ۱\}$ یک مدار تناوبی مرتبه ۲ برای g خواهدبود. به استقراء می‌توان‌ثابت‌کرد مدار هر عدد صحیح، سرانجام‌تناوبی است و سرانجام به $\{۰, ۱\}$ ختم‌می‌شود؛ همچنین می‌توان‌نشان‌داد که $W^s(۰) = ۲\mathbb{Z}$، مجموعه همه اعداد صحیح زوج و $W^s(۱) = ۲\mathbb{Z} + ۱$، مجموعه همه اعداد صحیح فرد است.

تمرین ۱.۲.۶. ثابت‌کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{N}$، عدد صحیح $m \in \mathbb{Z}$ یافت‌می‌شود که $g^k(x) = m \mp x$.

لم ۶.۲.۱. *در هر فضای متریک* (X, d_X)*، مجموعه‌های پایدار نقاط تناوبی متفاوت، مجزا هستند؛ به بیان دیگر اگر* $q, p \in X$ *دو نقطه متناوب برای نگاشت* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *باشند و* $p \neq q$*، آنگاه* $W^s(p) \cap W^s(q) = \varnothing$.

برهان. فرض‌کنید $p, q \in X$ دو نقطه تناوبی متمایز، با دوره تناوب اولیه به‌ترتیب k_1 و k_2 برای $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ باشند. فرض‌کنید $W^s(p) \cap W^s(q) \neq \varnothing$، نشان‌می‌دهیم $p = q$. اگر $x \in W^s(p) \cap W^s(q)$ آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ اعداد طبیعی N_1 و N_2 موجود است که اگر $n \geqslant N_1$، آنگاه $d_X(p, f^{nk_1}(x)) < \varepsilon/2$ و اگر $n \geqslant N_2$ آنگاه $d_X(q, f^{nk_2}(x)) < \varepsilon/2$.

قراردهید $M := \max\{N_1, N_2\}$. اگر $n \geqslant M$ آنگاه هر دو نامساوی بالا برقرار بوده،

$$d_X(p,q) \leqslant d_X(p, f^{nk_1k_2}(x)) + d_X(f^{nk_1k_2}(x), q) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\square$

تمرین ۷.۲.۱. با فرض‌های تمرین ۵.۲.۱ ثابت‌کنید اگر $x \in X$ نقطه‌ای متناوب باشد، آنگاه:

$$h(W^s(x)) = W^s(h(x)).$$

اگر $f : X \to X$ یک نگاشت (دوسویی) باشد، زیرمجموعه A از X را تحت f، ناوردای مثبت (منفی) گویند هرگاه $f(A) \subset A$ $(f^{-1}(A) \subset A)$.

تمرین ۸.۲.۱. ثابت‌کنید مکمل یک مجموعه ناوردای مثبت، ناوردای منفی است و برعکس. ثابت‌کنید اگر نگاشت $f : X \to X$ دوسویی باشد، آنگاه برای هر مجموعه ناوردای $A \subset X$ و هر $n \in \mathbb{Z}$، $f^n(A) = A$. نشان‌دهید درصورتی‌که f دوسویی نباشد، این مطلب برقرار نیست.

قضایای نقطه ثابت نقشی اساسی در همه شاخه‌های سیستم‌های دینامیکی برعهده‌دارند؛ یکی از کاربردهای مهم آن‌ها اثبات وجود و یگانگی جواب برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل عادی و معادلات با مشتقات جزئی است. قضیه نقطه ثابت براوئر به‌واسطه قدمت و کاربردهای فراوان در میان قضایای نقطه ثابت از همه معروف‌تر است. برخی از تعمیم‌های این قضیه به‌صورت زیر هستند:

۱- **قضیه نقطه ثابت براوئر.**[1] هر تابع پیوسته روی گوی بسته در $\mathbb{R}^n$، نقطه ثابت داراد.

۲- هر تابع پیوسته روی یک مجموعه محدب و بسته در $\mathbb{R}^n$، دارای نقطه ثابت است.

---
[1] Luitzen Brouwer

۳- **قضیه نقطه ثابت شاودر.**[۱] هر تابع پیوسته روی یک زیرمجموعه فشرده و محدب در یک فضای باناخ، دارای نقطه ثابت است.

۴- **قضیه نقطه ثابت باناخ.**[۲] هر تابع انقباضی روی یک فضای متریک کامل دارای نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

فرض کنید $(V,+,\cdot)$ یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد. تابع $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}_+$ را یک نرم روی V گویند، هرگاه برای هر $x,y\in V$ و برای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ (یا $\lambda\in\mathbb{C}$) در روابط زیر صدق کند:

۱- $\|x\|=\circ\Rightarrow x=\circ$.

۲- $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$.

۳- $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

دراین‌صورت زوج مرتب $(V,\|\,\|)$ را یک فضای برداری نرم‌دار می‌گویند. فضای (V,d) با تعریف $d(x,y):=\|x-y\|$، یک فضای متریک خواهدشد؛ این متر را، متر القاشده از نرم $\|\,\|$ می‌گویند. فضای نرم‌دار $(V,\|\,\|)$ را یک فضای باناخ گویند هرگاه فضای متریک حاصل از متر القاشده از نرم، کامل باشد.

مثال ۵.۲.۱. هرگاه d متر استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه نرم $|x|:=d(x,\circ)^{\frac{۱}{۲}}$ را نرم استاندارد می‌گویند. فضای نرم‌دار $(\mathbb{R}^n,|\,|)$ یک فضای باناخ است.

مثال ۶.۲.۱. فرض کنید $L(\mathbb{R}^n)$ مجموعه همه تبدیلات خطی روی $\mathbb{R}^n$ باشد. نرم $\|\,\|$ را روی $L(\mathbb{R}^n)$ چنین تعریف‌کنید: $\|T\|=\sup\{|Tx|:|x|=۱\}$، که درآن $|\,|$ نرم استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ است. اینک نشان می‌دهیم $\|\,\|$ در خواص سه‌گانه نرم صدق‌می‌کند:

۱-تعریف نرم به‌طور بدیهی در بند ۱ صدق‌می‌کند.

۲-فرض‌کنید $\lambda\in\mathbb{R}$ دراین‌صورت:

$$\begin{aligned}\|\lambda T\| &= \sup\{|\lambda Tx|:|x|=۱\}\\ &= \sup\{|\lambda|\,|Tx|:|x|=۱\}\\ &= |\lambda|\sup\{|Tx|:|x|=۱\}\\ &= |\lambda|\,\|T\|.\end{aligned}$$

[۱] Juliusz Schauder

[۲] Stefan Banach

۳-اگر $y \neq \circ \in \mathbb{R}^n$ آنگاه طبق تعریف:

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{|Tx| : |x| = ۱\}\\ &= \sup\left\{\left|T\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| : x \neq \circ\right\} \geq \left|T\left(\frac{y}{|y|}\right)\right| = \frac{|Ty|}{|y|},\end{aligned}$$

بنابراین

$$|Ty| \leq \|T\|\,|y|. \tag{۳.۱}$$

اینک اگر $S \in L(\mathbb{R}^n)$ تبدیل دیگری باشد:

$$\begin{aligned}\|T+S\| &= \sup\left\{\frac{|Tx+Sx|}{|x|} : |x| = ۱\right\}\\ &\leq \sup\{|Tx| + |Sx| : |x| = ۱\}\\ &\leq \sup\{|Tx| : |x| = ۱\} + \sup\{|Sx| : |x| = ۱\}\\ &= \|T\| + \|S\|.\end{aligned}$$

قضیه ۷.۲.۱. *هر فضای برداری نرم‌دار با بعد متناهی یک فضای باناخ است.*

قضیه ۸.۲.۱. *هر دو نرم روی یک فضای متناهی‌البعد هم‌ارز می‌باشند؛ یعنی توپولوژی تولیدشده از طریق آن‌ها برابر است.*

برهان. برای دیدن اثباتی از دو قضیه اخیر می‌توانید به مرجع [۵۱] مراجعه‌کنید. □

نگاشت $f : X \to X$ را روی فضای متریک (X, d)، انقباضی گویند اگر عدد حقیقی $\circ < k < ۱$ یافت شود که برای هر $x_۱, x_۲ \in X$، $d_X(f(x_۱), f(x_۲)) \leq kd(x_۱, x_۲)$.

قضیه ۹.۲.۱. *(نقطه ثابت باناخ) اگر (X, d) یک فضای متریک کامل و $f : X \to X$ انقباضی باشد، آنگاه f دارای نقطه ثابت منحصربه‌فرد است؛ یعنی $x \in X$ به‌طور یگانه یافت‌می‌شود که $f(x) = x$.*

برهان. اگر $x_۱, x_۲ \in X$ دو نقطه ثابت متمایز باشند، آنگاه برای $i = ۱, ۲$، $f(x_i) = x_i$. چون نگاشت انقباضی است، پس $k < ۱$ یافت‌می‌شود که

$$d(f(x_۱), f(x_۲)) = d(x_۱, x_۲) \leq kd(x_۱, x_۲).$$

بنابراین $d(x_۱, x_۲) = ۰$ و این یک تناقض است. برای اثبات وجود، فرض‌کنید $x_۰ \in X$ یک نقطه دلخواه و برای $n \geq ۱$، قراردهید $x_{n+۱} = f(x_n)$. در سه‌گام ثابت‌می‌شود که دنباله x_n کوشی و همگرا به یک نقطه ثابت تابع f است.

گام اول: برای $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n-۱}) = d(f(x_{n-۱}), f(x_{n-۲})) \leq kd(x_{n-۱}, x_{n-۲}),$$

و به استقراء، $d(x_n, x_{n-۱}) \leq k^{n-۱}d(x_۱, x_۰)$.

گام دوم: اگر $n > m$، آنگاه

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-۱}) + d(x_{n-۱}, x_{n-۲}) + \cdots + d(x_{m+۱}, x_m) \\ &\leq (k^{n-۱} + k^{n-۲} + \cdots + k^m)d(x_۱, x_۰) \\ &< \frac{k^m}{۱-k}d(x_۱, x_۰). \end{aligned}$$

برای هر $\varepsilon > ۰$، اگر m به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه $d(x_n, x_m) < \varepsilon$؛ یعنی دنباله $\{x_n\}$ کوشی و همگرا به x است.

گام سوم: چون f پیوسته است، با حد گرفتن از دوطرف رابطه $x_{n+۱} = f(x_n)$ نتیجه‌می‌شود: $x = f(x)$. □

تمرین ۹.۲.۱. فرض‌کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده و $f : X \to X$ نگاشتی باشد که اگر $x \neq y$، آنگاه $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. ثابت‌کنید f دارای نقطه ثابت $x_۰ \in X$ است که برای هر $x \in X$، $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_۰$.

تمرین ۱۰.۲.۱. فرض‌کنید (X, d) یک فضای متریک کامل باشد که بیشترین فاصله دو نقطه حداکثر برابر با ۱ و $f : X \to X$ به‌گونه‌ای است که

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) - (۱/۲)(d(f(x), f(y)))^۲.$$

ثابت‌کنید f دارای نقطه ثابت منحصربه‌فرد $x_۰ \in X$ است که $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_۰$.

تمرین ۱۱.۲.۱. هرگاه $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد و $|A| := \max_{ij} |a_{ij}|$، آنگاه نشان‌دهید $|\cdot|$، یک نرم روی ماتریس‌ها بوده، $|A| \leqslant \|A\| \leqslant \sqrt{n}|A|$.

تمرین ۱۲.۲.۱. اگر نگاشت $x \mapsto Ax$ روی $\mathbb{R}^n$ انقباضی باشد ثابت‌کنید $tr(A) < n$.

تمرین ۱۳.۲.۱. فرض‌کنید A یک ماتریس ۳×۳ حقیقی باشد که $\det A = ۱/۱۰$ و $tr(A) = ۲/۷$. نشان‌دهید A انقباضی نیست.

تمرین ۱۴.۲.۱. ثابت‌کنید $\|A\| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^۲}$، که در آن $A = (a_{ij})_{۱\leqslant i,j\leqslant n}$.

تمرین ۱۵.۲.۱. ثابت‌کنید $\|A\| \geqslant |\det A|^{۱/n}$.

تمرین ۱۶.۲.۱. ثابت‌کنید هر نرم روی ماتریس‌ها، نسبت‌به درایه‌های آن پیوسته است.

فرض‌کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $f : X \to X$ یک نگاشت پیوسته باشد. نقطه ثابت $x_۰ \in X$ برای f را پایدار به معنای لیاپانوف گویند، اگر برای هر مجموعه باز U که $x_۰$ را دربرداشته‌باشد، مجموعه باز V یافت شود که برای هر $x \in V$، $O^+(x) \subset U$. نقطه ثابت $x_۰$ را پایدار مجانبی گویند هرگاه پایدار بوده، مجموعه باز $x_۰ \in U$ یافت شود که برای هر $x \in U$، $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_۰$. دراین‌صورت U را یک ناحیه تله‌گذاری‌شده برای نقطه ثابت جاذب $x_۰$ می‌گویند. اگر $x_۰$ یک نقطه تناوبی از مرتبه اولیه m برای f باشد، آن را پایدار (پایدار مجانبی) به معنای لیاپانوف گویند اگر $x_۰$ به‌عنوان یک نقطه ثابت برای f^m پایدار (پایدار مجانبی) باشد. روشن است که اگر یک نقطه از مدار تناوبی $O(x_۰) = \{x_۰, f(x_۰), \cdots, f^{m-۱}(x_۰)\}$ پایدار (پایدار مجانبی) باشد، سایر نقاط مدار نیز پایدار (پایدار مجانبی) هستند.

اگر $x_۰$ نقطه ثابت پایدار مجانبی باشد و U یک ناحیه تله‌گذاری‌شده برای $x_۰$ باشد، ناحیه جذب $x_۰$ چنین تعریف‌می‌شود:

$$B := \bigcup_{n=۰}^{\infty} f^{-n}(U).$$

ناحیه جذب نقطه تناوبی $x_۰$ از مرتبه اولیه m نیز برابر است با

$$B = \bigcup_{n=۰}^{\infty} f^{-nm}(U).$$

روشن است که اگر $i \neq j \pmod m$، آنگاه ناحیه جذب نقطه $f^i(x_۰)$ و $f^j(x_۰)$ از یکدیگر جدا هستند. ناحیه جذاب مدار تناوبی جاذب $O(x_۰)$ نیز اجتماع نواحی جذب نقاط آن تعریف‌می‌شود چنانکه از تعریف برمی‌آید نواحی جذب نقاط ثابت و مدارهای تناوبی، مجموعه‌هایی باز هستند.

تمرین ۱۷.۲.۱. ثابت‌کنید مجموعه مکمل ناحیه جذب یک نقطه ثابت یا نقطه متناوب، ناورداست.

فرض‌کنید (X, d) یک فضای متریک و $f : X \to X$ نگاشتی پیوسته باشد و $x \in X$. نقطه $y \in X$ را یک نقطه ω-حدی برای x گویند هرگاه دنباله $\{n_k\}$ از اعداد طبیعی موجود باشد که $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$ و $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y$. مجموعه همه نقاط ω-حدی وابسته به x را با $\omega_f(x)$ و یا $\omega(x)$ نمایش‌می‌دهند. اگر f وارون‌پذیر باشد مجموعه α-حدی وابسته به $x \in X$ نیز به‌طور مشابه عبارت‌است از مجموعه همه $y \in X$ که برای یک دنباله واگرای $\{n_k\}$ از اعداد طبیعی، $\lim_{k\to+\infty} f^{-n_k}(x) = y$. مجموعه نقاط α-حدی وابسته به x را با $\alpha_f(x)$ یا $\alpha(x)$ نمایش‌می‌دهند.

نقطه x را بازگشتی گویند هرگاه $x \in \omega(x)$. مجموعه نقاط بازگشتی برای نگاشت f را با $\mathcal{R}(f)$ نمایش‌می‌دهند. نقطه $x \in X$ را غیرسرگردان گویند اگر برای هر همسایگی U از x عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. مجموعه نقاط غیرسرگردان نگاشت f را با $NW(f)$ نمایش‌می‌دهند. هر نقطه بازگشتی یک نقطه غیرسرگردان است و درحقیقت $\overline{\mathcal{R}(f)} \subset NW(f)$. زیرمجموعه بسته و ناوردای $Y \subset X$ را تحت اثر نگاشت $f : X \to X$ مینیمال گویند هرگاه شامل هیچ زیرمجموعه سره‌ای با همین خصوصیات نباشد. نگاشت f را مینیمال گویند هرگاه X مینیمال باشد.

تعریف ۱.۲.۱۰. اگر $f : X \to X$ یک نگاشت وارون‌پذیر باشد و $x \in X$ به‌گونه‌ای باشد که برای دو عنصر $a, b \in X$، $\lim_{n\to\infty} f^{-n}(x) = a$ و $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = b$، آنگاه گویند x نسبت به a و b هتروکلینیک است. اگر $a = b$ آنگاه x را هموکلینیک نسبت به a می‌گویند.

تمرین ۱.۲.۱۸. ثابت‌کنید مجموعه‌های α-حدی و ω-حدی یک نقطه، بسته و تحت شار ناوردا هستند.

تمرین ۱.۲.۱۹. ثابت‌کنید مجموعه نقاط غیرسرگردان، بسته و تحت نگاشت f ناوردا بوده و برای هر $x \in X$ شامل مجموعه‌های حدی $\alpha(x)$ و $\omega(x)$ است.

تمرین ۱.۲.۲۰. ثابت‌کنید $\overline{\mathcal{R}(f)} \subset NW(f)$.

تمرین ۱.۲.۲۱. ثابت‌کنید:

$$\alpha(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geqslant n} f^{-i}(x)}, \qquad \omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geqslant n} f^{i}(x)}.$$

تمرین ۱.۲.۲۲. مثالی از یک سیستم دینامیکی ارائه‌دهید که $NW(f) \nsubseteq \overline{\mathcal{R}(f)}$.

تمرین ۲۳.۲.۱. ثابت‌کنید هر نقطه هموکلینیک یک نقطه غیرسرگردان است ولی بازگشتی نیست.

تمرین ۲۴.۲.۱. فرض‌کنید X فشرده و $f : X \to X$ پیوسته باشد:

۱- نشان‌دهید $Y \subset X$ مینیمال است اگر و فقط اگر برای هر $y \in Y$، $\omega(y) = Y$.

۲- نشان‌دهید Y مینیمال است اگر و فقط اگر مدار پیش‌رو هر $y \in Y$ در Y چگال باشد.

تمرین ۲۵.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده باشد. ثابت‌کنید همیومورفیسم $f : X \to X$ مینیمال است اگر و فقط اگر برای هر مجموعه باز و ناتهی $U \subset X$، عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $\bigcup_{k=-n}^{n} f^k(U) = X$.

تمرین ۲۶.۲.۱. نشان‌دهید هرگاه X نقطه گسسته نداشته‌باشد و $O^+(x)$ چگال باشد، آنگاه $\omega(x)$ چگال است. با یک مثال نشان‌دهید هرگاه X نقطه گسسته داشته‌باشد این مطلب درست نیست.

تمرین ۲۷.۲.۱. فرض‌کنید $f : X \to X$ نگاشتی پیوسته روی یک فضای متریک باشد. فرض‌کنید $p \in X$.

۱- ثابت‌کنید $\overline{O^+(p)} = O^+(p) \cup \omega(p)$.

۲- ثابت‌کنید اگر $\omega(p) = \emptyset$ آنگاه $O^+(p)$ زیرمجموعه‌ای بسته از X است.

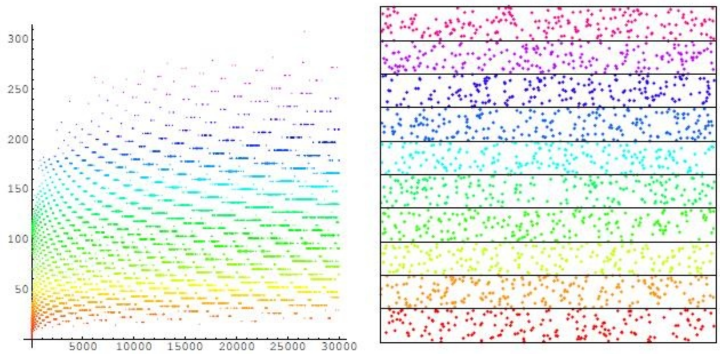
۳- فرض‌کنید $O^+(p)$ در X فشرده باشد. نشان‌دهید $O^+(p) = \omega(p)$.

تمرین ۲۸.۲.۱. فرض‌کنید G یک گروه توپولوژیک باشد. ثابت‌کنید بستار مجموعه

$$\{g^n : n \in \mathbb{Z}\},$$

یک زیرگروه آبلی از G است. نتیجه‌بگیرید که هرگاه G یک انتقال از چپ مینیمال داشته‌باشد، آبلی است.

تمرین ۲۹.۲.۱. ثابت‌کنید گروه G می‌تواند به‌صورت مینیمال روی فضای توپولوژیک فشرده X عمل‌کند اگر و فقط اگر برای هر مجموعه باز و ناتهی $U \subset X$، عناصر $g_1, \cdots, g_n \in G$ موجود باشد که $\bigcup_{i=1}^{n} g_i(U) = X$.



شکل ۱.۱. سمت چپ، مدت زمانی را نشان‌می‌دهد که طول‌می‌کشد تا در مسئله کلاتز از n به ۱ تنزل شود. شکل سمت راست، نشان‌دهنده دنباله ارقام عدد π است.

۳.۱ مثال‌هایی از سیستم‌های دینامیکی متناهی‌البعد

در این بخش نمونه‌هایی از سیستم‌های دینامیکی متناهی‌البعد مطرح‌می‌شود؛ بیشتر این سیستم‌ها، پرآوازه بوده و به‌عنوان ستارگان سیستم‌های دینامیکی در این کتاب ارائه‌می‌شوند.

نگاشت لجستیک. تابع $f_\mu(x) = \mu x(۱ - x)$، مثالی از یک نگاشت بازه‌ای است. برای محاسبه بعضی از مدارها به ازای $\mu = ۳$، با شرط اولیه $x_۰ = ۰/۳$ شروع‌کرده، تکرار بازگشتی مقادیر نگاشت را محاسبه‌کنید:

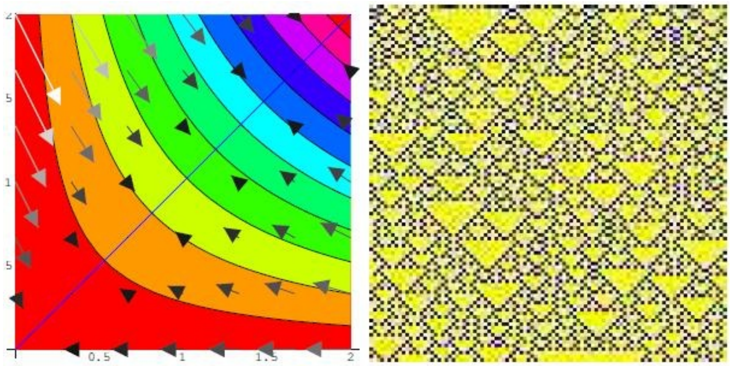
$$x_۱ = f_\mu(x_۰) = ۳x_۰(۱ - x_۰) = ۰/۶۳, x_۲ = f_\mu(x_۱) = ۰/۶۹۹۳, \cdots .$$

مسئله کلاتز.[1] نگاشت T را روی اعداد طبیعی چنین تعریف‌کنید: اگر n زوج باشد، $T(n) = n/۲$ و اگر n فرد باشد قراردهید: $T(n) = ۳n + ۱$ به‌نظرمی‌رسد که مدار $n, T(n), T(T(n)), \cdots$ همیشه به ۱ ختم‌می‌شود ولی اثباتی برای آن وجودندارد. به باور گروهی از مردم، ریاضیات، هنوز برای پاسخ دادن به این پرسش آمادگی‌ندارد.

به‌لحاظ نظری مدار تناوبی $n, T(n), T^۲(n), \cdots, T^k(n) = n$ یا وجود جوابی که به بی‌نهایت بگریزد (بیکران شود) ممکن است؛ این مسئله همچنین مسئله اولام یا مسئله $۳n + ۱$ نیز نامیده‌می‌شود؛ این یک مسئله باز معروف است. تصویر سمت چپ شکل ۱.۱ نشان‌دهنده فاصله زمانی شروع از n تا رسیدن به ۱ است.

ارقام π. ارقام عدد π به شکل تصادفی ظاهرمی‌شوند؛ با اختیار $T(x) = ۱۰x \pmod ۱$ و $f(x) = [۱۰x]$ که $[x]$ تابع جزء صحیح است، عدد $f(T^n(\pi))$ عبارت‌است از: $n+۱$امین

[1] Lothar Collatz



شکل ۲.۱. سمت چپ، خم‌های انتگرال (۴.۱) و سمت راست، مداری از اتوماتای ۱۸.

رقم اعشار π. به‌نظرمی‌رسد که ارقام یا حتی دنباله‌های ارقام، با تناوب‌های دلخواه ظاهرمی‌شوند؛ این یک مسئله باز است و در صورت صحت، π را نرمال می‌نامند. تصویر سمت راست شکل ۱.۱ نشان‌دهنده دنباله $x_n = f(T^n(\pi))$ است.

محاسبه ریشه دوم. نگاشت زیر را درنظربگیرید:

$$T(x,y) = \left(\frac{۲xy}{x+y}, \frac{x+y}{۲}\right), \qquad (۴.۱)$$

که به یک زوج عدد، زوج جدید میانگین هم‌ساز و میانگین حسابی را نسبت‌می‌دهد. به سادگی می‌توانید پایابودن کمیت $F(x,y) = xy$ را تحت نگاشت T بررسی‌کنید: $F(T(x,y)) = F(x,y)$. هر کمیت پایا را یک انتگرال می‌نامند. هر نگاشت در صفحه که دارای چنین انتگرالی است یک سیستم انتگرال‌پذیر نامیده‌می‌شود. همه مدارها به خط $y = x$، که از نقاط ثابت تشکیل‌شده‌است، همگرامی‌شوند. فایده این مطلب در چیست؟ به‌عنوان مثال با شروع از $(۱, ۵)$، دنباله (x_n, y_n) به قطر و بنابراین به $(\sqrt{۵}, \sqrt{۵})$ همگرا می‌شود. با محاسبه چند جمله اول دنباله یعنی:

$$(۱, ۵), (\frac{۵}{۳}, ۳), (\frac{۱۵}{۷}, \frac{۷}{۳}), (\frac{۱۰۵}{۴۷}, \frac{۴۷}{۲۱}),$$

ملاحظه‌می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$؛ $\sqrt{۵}$ در بازه $[x_n, y_n]$ قراردارد. به‌عنوان مثال $۴۷/۲۱ = ۲٫۲۳۸$ یک تقریبی خوب برای $\sqrt{۵} = ۲٫۲۳۶$ است. خم‌های انتگرال نگاشت T، در شکل ۲.۱ ترسیم‌شده‌اند.

اتوماتای سلولی. هرگاه دنباله x از صفر و یک، داده‌شده‌باشد دنباله جدید $y = T(x)$ را چنان تعریف‌کنید که درایه y_n فقط به $x_{n-۱}, x_n, x_{n+۱}$ وابسته‌باشد. ۲۵۶ اتوماتای متفاوت

از این نوع وجوددارد. تصویر سمت راست شکل ۲.۱ نمایش‌دهنده مداری از قاعده ۱۸ است؛ یکی از خصوصیات جالب اتوماتای یادشده، این است که تحول آن، روی بخش‌هایی از فضای فاز، خطی است. پیچ‌خوردگی‌ها، یعنی مرز میان دو قسمت، دارای حرکت خطی است. دنباله x در n پیچ‌خوردگی دارد اگر برای یک $k \geqslant ۰$، $[x_{n-k}, \cdots, x_{n+k+۱}] = [۱, ۰, \cdots, ۰, ۱]$؛ به‌عنوان مثال، قطعه ۱۰۰۰۱ نمونه‌ای از یک پیچ‌خوردگی است.

معادلات دیفرانسیل در صفحه. معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم می‌تواند به‌عنوان معادلات دیفرانسیل در صفحه نوشته‌شود؛ به‌عنوان یک مثال، می‌توان از نوسانگر *وان در پل*[۱] با معادلات:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - (x^۲ - ۱)y,\end{aligned} \tag{۵.۱}$$

یادکرد، که یک دور حدی دارد. همه مدارها (به‌جز $(۰, ۰)$) به دور حدی همگرا می‌شوند [۳۶].

سیستم لورنس. دستگاه معادلات دیفرانسیل:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ۱۰(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + ۲۸x - y \\ \dot{z} &= xy - \frac{۸}{۳}z,\end{aligned} \tag{۶.۱}$$

دستگاه لورنس نامیده‌می‌شود. در شکل ۳.۱ مدار $(x(t), y(t), z(t))$ را ملاحظه‌می‌کنید که به‌طور عددی انتگرال‌گیری شده و از طریق مجموعه‌ای به نام جاذب لورنس که نمونه‌ای از جاذب عجیب است که به‌وسیله *ادوارد لورنس*[۲] (۲۰۰۸ − ۱۹۱۷) در سال ۱۹۶۳ کشف شد، جذب‌می‌شود. مدارها در این مجموعه دارای رفتاری آشوبناک هستند؛ به این معنی که در آن‌ها حساسیت نسبت به شرط اولیه مشاهده‌می‌شود؛ همچنین این مجموعه به‌عنوان فرکتالی از بعدی به‌طور اکید بین ۱ و ۲ اندازه‌گیری شده‌است [۱۴].

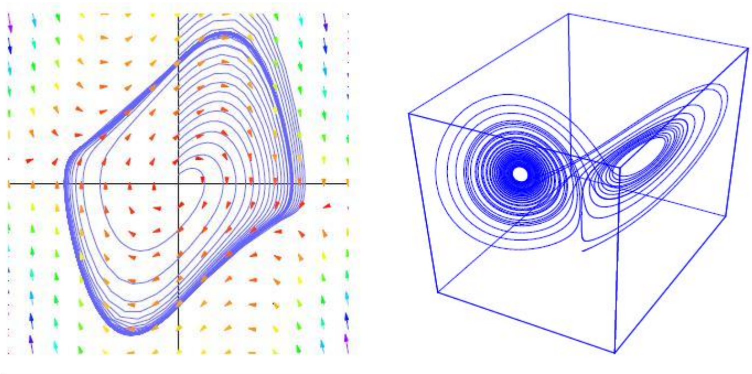
نگاشت استاندارد. نگاشت $T(x, y) = (۲x - y + c \sin x, x)$ روی $\mathbb{R}^۲$ را نگاشت استاندارد می‌گویند. این نگاشت می‌تواند به‌عنوان یک نگاشت روی چنبره موردنظر قرارگیرد؛ زیرا روابط هم‌ارزی را حفظ‌می‌کند:

$$T(x + ۲\pi, y) = T(x, y) + (۴\pi, ۲\pi) \quad \text{و} \quad T(x, ۲\pi + y) = T(x, y) + (-۲\pi, ۰).$$

این نگاشت برای هر مقدار c حافظ مساحت است. نگاشت استاندارد در حدود سال ۱۹۶۰ در رابطه با دینامیک الکترون‌ها در میکروترون، ظاهرشده و در ۱۹۶۹ به‌وسیله *بوریس*

[۱] Van der Pol

[۲] Edward Lorenz



شکل ۳.۱. سمت چپ، صفحه فاز معادله وان‌درپل و سمت راست، جاذب لورنس.

چریکف[1] موردارزیابی محاسباتی و عددی قرارگرفت. برای $c = 0$ به‌طور کامل تحلیل‌می‌شود و با افزایش c به‌طور مرتب آشوبناکتر خواهدشد. این نگاشت هم‌ارز معادله بازگشتی مرتبه دوم به‌صورت $x_{n+1} = 2x_n + c\sin x_n - x_{n-1}$ است. نقاط تکین این سیستم دینامیکی $x = y = k\pi$ هستند که $k \in \mathbb{Z}$. تصویر میانی در شکل ۴.۱ نشان‌دهنده تعدادی از مدارها در حالت $c = 1/3$ است [۴]. ازآنجاکه بسیاری از دستگاه‌های دینامیکی به‌طور موضعی به این نگاشت تقلیل می‌یابند، نگاشت استاندارد نامیده‌می‌شود [۵].

نگاشت هنون. یکی از ساده‌ترین نگاشت‌های غیرخطی روی صفحه نگاشت

$$H(x, y) = (ax^2 + 1 - by, x),$$

است. این نگاشت که نخستین‌بار در سال ۱۹۷۶ به‌وسیله *میشل* هنون[2] به‌عنوان یک مدل ساده از نگاشت پوانکاره برای دستگاه لورنس ارائه شد، برای $|b| = 1$ حافظ مساحت است؛ برای $|b| < 1$ منقبض‌کننده مساحت خواهدبود و در حالت اخیر در صفحه فاز، جاذب هنون را تولیدمی‌کند. جاذب هنون برای مقادیر $a = -1/4$ و $b = -0/3$ تولیدمی‌شود؛ نگاشت هنون هم‌ارز دنباله بازگشتی غیرخطی $x_{n+1} = ax_n^2 + 1 - bx_{n-1}$ خواهدبود. اگرچه حل صریح معادلات بازگشتی خطی، مانند معادله *فیبوناتچی*[3] $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ با استفاده از جبر خطی به‌دست‌می‌آید ولی معادلات غیرخطی به‌طور معمول فرمول صریحی برای x_n ارائه‌نمی‌دهند.

فرض‌کنید $\Delta = (b+1)^2 - 4a$، دراین‌صورت برای $\Delta \geq 0$ نقاط ثابت H دو نقطه $x, y = ((b+1) \mp \sqrt{\Delta})/2a$ بوده و درغیراین‌صورت نگاشت، نقطه ثابت نخواهدداشت.

[1] Boris Chirikov
[2] Michel Hénon
[3] Fibonacci